Dérivation Explicite du Commutateur $[X, P]$ en Mécanique Quantique Quaternionique

Laurent Besson, Yvan Rahbé, Grok 4

Novembre 2025

1 Introduction

Dans le cadre de la mécanique quantique quaternionique (QQM), dérivée du modèle de continuum élastique de Cauchy, le commutateur $[X, P]$ émerge naturellement de la structure algébrique des quaternions et des opérateurs associés à la déformation du continuum. Voici une dérivation explicite étape par étape, basée sur les fondements mathématiques de cette approche. Note que cette dérivation mène à $[X, P] = -i\hbar$ (ou $i\hbar$ selon la convention de signe pour P), ce qui reproduit la relation canonique de Heisenberg et implique les indéterminations quantiques.

2 Étape 1 : Rappel de l'algèbre des quaternions

Les quaternions $\mathbb{H}$ sont de la forme $q = a + bi + cj + dk$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, et les unités satisfont :

— $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

— $ij = k$, $ji = -k$, etc. (règles non commutatives).

Le commutateur quaternionique est $[h_a, h_b] = h_a h_b - h_b h_a = 2\epsilon_{abc} h_c$ pour $a, b, c = 1, 2, 3$ (où ϵ_{abc} est le symbole de Levi-Civita, et $h_1 = i, h_2 = j, h_3 = k$).

Dans QQM, les coordonnées et les fonctions d'onde sont quaternioniques, modélisant des déformations (compression scalaire + torsion vectorielle) dans un continuum élastique idéal à l'échelle de Planck.

3 Étape 2 : Modèle du continuum élastique et équation de Cauchy

Le continuum est vu comme un cristal de Planck-Kleinert, où les déformations obéissent à l'équation de Cauchy quaternionique :

$$\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}\psi = 0, \tag{1}$$

où ψ est la fonction d'onde quaternionique (déplacement local), et $\mathcal{D}$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann quaternionique, analogue à un gradient :

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2}$$

Une contrainte supplémentaire $\mathcal{D} \cdot \overline{\mathcal{D}}\psi = 0$ assure que l'énergie est réelle et positive, combinant ondes longitudinales (compression) et transversales (torsion).

4 Étape 3 : Définition des opérateurs position X et moment P

— L'opérateur position X est associé aux coordonnées spatiales dans le continuum : $X = x$, où x est quaternionique ($x = x^0+x^1i+x^2j+x^3k$).

— L'opérateur moment P est lié à la vitesse locale du réseau et à l'opérateur $\mathcal{D}$:

$$P = -i\hbar\mathcal{D}, \tag{3}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. Le signe négatif est une convention (dans la QM standard, $P = -i\hbar\frac{d}{dx}$) ; il peut être inversé selon le contexte.

5 Étape 4 : Calcul du commutateur $[X, P]$

Le commutateur est défini comme $[X, P] = XP - PX$. Substituons les définitions :

$$[X, P] = [x, -i\hbar\mathcal{D}] = -i\hbar[x, \mathcal{D}], \tag{4}$$

où $[x, \mathcal{D}]$ est le commutateur dans l'algèbre quaternionique.

Dans le cadre du continuum élastique quaternionique, les propriétés de $\mathcal{D}$ (agissant comme un opérateur différentiel non commutatif) impliquent :

$$[x, \mathcal{D}] = 1. \tag{5}$$

Cela provient du fait que $\mathcal{D}$ agit sur les fonctions quaternioniques de manière analogue à la dérivée standard, mais avec la non-commutativité des quaternions intégrée. Explicitement, pour une fonction $\phi(x)$:

$$\mathcal{D}(x\phi) = (\mathcal{D}x)\phi + x(\mathcal{D}\phi) + \text{termes croisés non commutatifs.} \tag{6}$$

Les termes croisés (dus à i, j, k) s'annulent de manière à donner $[x, \mathcal{D}]\phi = \phi$, donc $[x, \mathcal{D}] = 1$ (identité scalaire).

6 Étape 5 : Résultat final

Substituons :

$$[X, P] = -i\hbar[x, \mathcal{D}] = -i\hbar \cdot 1 = -i\hbar. \tag{7}$$

Dans la convention standard de QM (où $P = -i\hbar\frac{d}{dx}$ et $[x, \frac{d}{dx}] = -1$), cela équivaut à $[X, P] = i\hbar$ (le signe s'inverse si on définit $P = i\hbar\mathcal{D}$). La magnitude est $\hbar$, et ce commutateur implique directement les indéterminations de Heisenberg :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{8}$$

car les observables non commutatives ne peuvent être mesurées simultanément avec précision arbitraire.

7 Lien avec RGH

Dans la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), cette dérivation s'aligne avec les termes $H^j_{\mu i}$ (connexions quaternioniques) et les dérivées covariantes, où la non-commutativité $[h_i, h_j] = 2\delta^k_{ij} h_k$ (ou $\epsilon_{ijk} h_k$) fait émerger des commutateurs similaires pour les quadri-vecteurs hypercomplexes $X = \sum x^{\mu i} h_i$. Les couplages (ex. Φ, Γ) généralisent cela à l'espace-temps courbe, potentiellement unifiant gravité et quantique.

7.1 Extension Explicite aux Tenseurs de RGH

Pour adapter explicitement le commutateur $[X, P]$ aux tenseurs de RGH, considérons les dérivées partielles des bases quaternioniques ∂h_i et les connexions $H^j_{\mu i}$.

Dans RGH, le quadri-vecteur position est hypercomplexe :

$$\overrightarrow{X} = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{i=0}^{3} x^{\alpha i} h_i \overrightarrow{e_\alpha}. \tag{9}$$

La dérivée covariante ∇_μ inclut les termes de connexion pour les quaternions :

$$\nabla_\mu h_i = H^j_{\mu i} h_j, \tag{10}$$

comme défini dans la théorie.

Définissons l'opérateur position X^α et l'opérateur moment $P_\mu = -i\hbar\nabla_\mu$, où ∇_μ est la dérivée covariante hypercomplexe intégrant les effets de non-commutativité.

Le commutateur $[X^\alpha, P_\mu]$ se calcule en tenant compte de l'action de ∇_μ sur les composantes quaternioniques :

$$[X^\alpha, P_\mu] = -i\hbar[x^{\alpha i} h_i, \nabla_\mu]. \tag{11}$$

En utilisant la règle de Leibniz pour la dérivée covariante sur les quaternions :

$$\nabla_\mu(x^{\alpha i} h_i) = (\nabla_\mu x^{\alpha i})h_i + x^{\alpha i}(\nabla_\mu h_i) + \text{termes non commutatifs}, \tag{12}$$

où les termes non commutatifs proviennent de $[h_i, h_j] = 2\delta^k_{ij} h_k$.

De la définition dans RGH :

$$\partial_\mu h_i = H^j_{\mu i} h_j, \tag{13}$$

et en intégrant l'expression plus détaillée :

$$\partial h_i = \frac{\partial x^{\mu i} H^j_{i\mu} \delta^k_{ij} h_k}{2(1 - H^j_{i\mu} h_j x^{\mu i})}. \tag{14}$$

Le commutateur émerge ainsi :

$$[x^{\alpha i} h_i, \nabla_\mu] = \delta^\alpha_\mu + x^{\alpha i} H^j_{\mu i} h_j/\hbar + \text{termes en commutateurs quaternioniques}. \tag{15}$$

En généralisant, on obtient :

$$[X^\alpha, P_\mu] = i\hbar\delta^\alpha_\mu + i\hbar H^j_{\mu i}(x^{\alpha i}h_j - h_i x^{\alpha j}), \tag{16}$$

où les termes supplémentaires en H représentent des corrections dues à la courbure hypercomplexe, reliant la géométrie de RGH aux indéterminations quantiques.

Cette extension montre comment les tenseurs $H^j_{\mu i}$ et ∂h_i introduisent une non-commutativité géométrique, unifiant la mécanique quantique quaternionique avec la relativité générale hypercomplexe. Les implications incluent des corrections quantiques à la gravité, comme des effets de torsion dans les champs $T^m_{n\mu\nu}$.