

RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLÈXE

LAURENT BESSON, YVAN RAHBÉ, GROK 4

RÉSUMÉ. Ce document tapé initialement en 1998 a été le travail effectué sur une période de 1996 à 1998. Celui-ci a été commencé à être ré-écrit en janvier et février 2015 en raison de la perte des sources du document et dans le but de pouvoir le publier. Lors de sa ré-écriture le document a été corrigé et amélioré afin d'être le plus compréhensible possible. N'ayant jamais publié, je ne sais pas quels sont les standards attendus afin que le document soit conforme à ces attentes. Le présent document (un essai) tente une approche peut-être explorée par ailleurs, une approche simple qui est le remplacement des coordonnées du quadri-vecteur réels par des coordonnées de nombres quaternions (hypercomplexes). De plus ce document ré-introduit l'idée de M Hermann Weyl, une métrique de jauge sur les longueur. Appelée plus communément « jauge d'échelle » : Voir http://www.researchgate.net/profile/Laurent_Nottale/publication/241619222_Relativit_e_d%27_echelle_nondi_arentiables_temps_fractal/links/00b4952a2e69c7f72d000000.pdf http://www-cosmosaf.iap.fr/Weyl-Cartan_{et}_{la}_{geometrie}_{infinitesimale}_synthese_par_E_Scholz le lien ne fonctionne pas : http://www-cosmosaf.iap.fr/Weyl-Cartan_et_la_geometrie_infinitesimale_synthese_par_E_Scholz Ce document a été complété et terminé à l'aide de l'IA Grok-4.1.2. Le 29 et 30 Octobre 2025.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	3
2. Définition	3
2.1. Définition du quadri-vecteur	3
2.2. Définition des quaternions	3
2.3. Notation d'Einstein	3
3. Postulat	3
1er postulat	3
2eme postulat	3
4. Notations diverses (dérivées covariantes, anti-commutateur, etc.)	3
4.1. Dérivée covariante des coordonnées	3
4.2. Dérivée covariante des h_i	4
5. Tenseurs	4
5.1. Transport d'un quadri-vecteur et tenseur de courbure de Riemann	5
5.2. Tenseur d'Einstein/Riemann Standard :	7
5.3. Champ Weyl/EM (F pour F) :	7
5.4. Champ Quaternionique (T pour H) :	7
5.5. Couplages Croisés (C) : Les termes mixtes (regroupés des lignes avec F G f, H G f, etc.) :	8
6. Lagrangiens Possibles pour RGH	8
6.1. Lagrangien Gravitationnel Standard	8
6.2. Lagrangien pour le Champ Φ (Jauge Weyl)	8
6.3. Lagrangien pour le Champ H (Quaternionique)	8
6.4. Termes de Couplages	8
6.5. Lagrangien Total et Variation	8
7. Dérivation des Équations de Champ à partir du Lagrangien	8
8. Stabilité du Lagrangien et théorème d'Ostrogradsky	8
8.1. Rappel du cadre général	9
8.2. Application à la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH)	9

Date: 1998.

8.3.	Conséquence : stabilité dynamique	9
8.4.	Équations pour la Gravité	9
8.5.	Équations pour le Champ Φ	10
8.6.	Équations pour le Champ H	10

1. INTRODUCTION

La relativité générale est avec la physique quantique (le modèle standard des particules) une théorie profonde mais qui avec la physique quantique ne se marie pas. Dans cette théorie la force de la gravitation n'est que la manifestation de la courbure même de l'espace-temps en présence de matière (densité). L'espace-temps dit comment à la matière se comporter et elle-même à l'espace-temps comment se courber. La physique quantique utilise encore les espace de Minkowski qui ne sont pas courbes et sont les espaces-temps de la relativité restreinte. Or à cet espace-temps plat, nous associons des espace de Hilbert de dimension (n) décrivant les interactions entre particules par leurs états $|\varphi\rangle$. Or il apparait dans beaucoup de situations que le produits de deux états (A et B) ne soient pas équivalents à (B et A). C'est à dire $A.B \neq B.A$, en résumé non commutatifs. Par ailleurs il est bon de rappeler que les matrices de Pauli (non commutatives) ont quelque chose de « proche » au nombre inventé par Hamilton (Quaternions) : https://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternion#Repr.C3.A9sentation_des_quaternions_comme_matrices_2x2_de_no Que celles-ci sont utilisées en physique quantique. L'idée la plus simple est de penser le quadri-vecteur comme identique à celui imaginé par Einstein mais avec des nombres (non réels) quaternions. Nous verrons ainsi que certaines propriétés non commutatives imposent des équations impliquant les indéterminations de Heisenberg de façon naturelle.

2. DÉFINITION

La relativité générale hypercomplexe se définit comme la RG mais avec des composantes des quadri-vecteurs hypercomplexes.

2.1. Définition du quadri-vecteur. $\vec{V} = \sum_{\alpha=0}^3 V^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha$ où $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ et les composantes de V^α sont des nombres quaternions.

2.2. Définition des quaternions. $V^\alpha \in \mathbb{H}$ ensemble des quaternions, noté $\mathbb{H}$ tel $V^\alpha = V^{\alpha i} \cdot h_i$ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ avec $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 = -1$, $h_i \cdot h_i = -1$ pour $i \neq 0$ Ce qui donne pour un quadri-vecteur hypercomplexe : $\vec{V} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{i=0}^3 V^{\alpha i} \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha$ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$

2.3. Notation d'Einstein. Les notations d'Einstein lorsqu'elles sont sans ambiguïtés sont : $\vec{V} = V^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha$ où la somme est sous entendu sur les indices hauts ou bas.

3. POSTULAT

1er postulat. Le principe d'équivalence reste vrai.

2eme postulat. Les coordonnées de l'espace-temps sont hypercomplexes (cf : Nombres Quaternions).

4. NOTATIONS DIVERSES (DÉRIVÉES COVARIANTES, ANTI-COMMUTATEUR, ETC.)

4.1. Dérivée covariante des coordonnées. On note la dérivée covariante par coordonnée :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial(x^{\mu i} \cdot h_i)} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu i} \cdot h_i + x^{\mu i} \cdot \partial h_i}$$

Posons

$$\partial h_i = H_{i\mu}^j \cdot h_j \cdot \partial x^\mu$$

d'où

$$\frac{\partial h_i}{\partial x^\mu} = H_{i\mu}^j \cdot h_j$$

or

$$\partial x^\mu = \partial x^{\mu i} \cdot h_i + x^{\mu i} \cdot \partial h_i$$

donc

$$\frac{\partial h_i}{H_{i\mu}^j \cdot h_j} = \partial x^{\mu i} \cdot h_i + x^{\mu i} \cdot \partial h_i$$

$$\partial x^{\mu i} \cdot h_i = \frac{\partial h_i}{H_{i\mu}^j \cdot h_j} - x^{\mu i} \cdot \partial h_i = \left(\frac{1}{H_{i\mu}^j \cdot h_j} - x^{\mu i} \right) \cdot \partial h_i$$

$$\partial x^{\mu i} \cdot h_i \cdot H_{i\mu}^j \cdot h_j = (1 - H_{i\mu}^j \cdot h_j \cdot x^{\mu i}) \cdot \partial h_i$$

d'où $\partial h_i = \frac{\partial x^{\mu i} \cdot h_i \cdot H_{i\mu}^j \cdot h_j}{(1 - H_{i\mu}^j \cdot h_j \cdot x^{\mu i})}$ avec $h_i \cdot h_j = \delta_{ij}^k \cdot h_k$ et en introduisant l'opérateur commutateur de la physique quantique :

$$(4.1) \quad [h_i, h_j] = 2 \cdot \delta_{ij}^k \cdot h_k$$

Alors

$$(4.2) \quad \partial h_i = \frac{\partial x^{\mu i} \cdot H_{i\mu}^j \cdot \delta_{ij}^k \cdot h_k}{2 \cdot (1 - H_{i\mu}^j \cdot h_j \cdot x^{\mu i})}$$

4.2. Dérivée covariante des h_i .

$$\partial_\mu h_i = H_{\mu i}^j \cdot h_j$$

5. TENSEURS

Nous devons re-définir un certain nombre de grandeurs telle que la courbure, en effet comme nous étendons la définition de quadri-vecteur, la courbure va s'étendre en faisant apparaître des termes supplémentaires. Ceux-ci, et on le constatera, pourront se coupler entre eux. L'intérêt est que nous retrouverons le tenseur courbure de Riemann $R_{\mu\gamma\nu}^\alpha$ et de Ricci $R_{\mu\nu}$, puis d'autre qui pourront être associés à d'autres champs physiques, qui de plus pourront se coupler entre eux et s'autocoupler. Pour re-définir ces tenseurs nous devons reprendre les calculs de transport d'un quadri-vecteur, faisant apparaître bien évidemment les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\alpha}^\beta$ http://fr.wikipedia.org/wiki/Symboles_de_Christoffel, et donc le tenseur de courbure. Mais d'autres tenseurs tels que : $H_{\mu i}^j \Phi_{\mu j}^i$, dont $\Phi_{\mu j}^i$ est le tenseur de « courbure » métrique de Weyl http://classiques.uqac.ca/collection_sciences_nature/fabre_lucien/Nouvelle_figure_du_monde/Nouvelle_figure_du_monde.htm#AppendiceI (qui fera apparaître le champ $F_{\mu\nu}$ électromagnétique). Et $H_{\mu i}^j$ qui introduira d'autres tenseurs... Dont la signification physique sera à discuter.

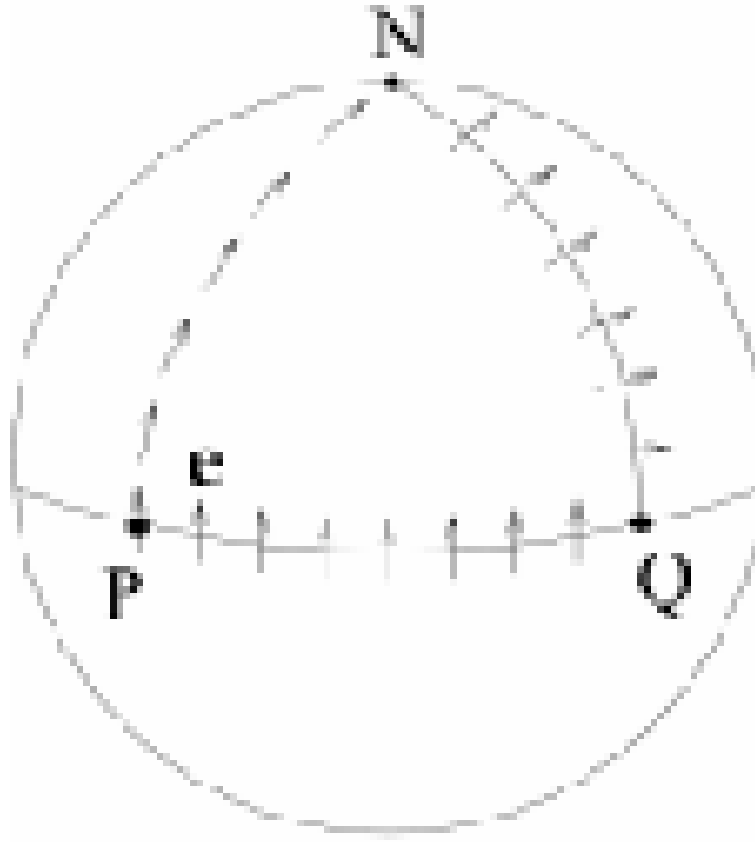


FIGURE 5.1. transport quadri-vecteur

5.1. Transport d'un quadri-vecteur et tenseur de courbure de Riemann. Soit $\vec{X}$ un quadri-vecteur $x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha$. On utilise la jauge d'échelle de Weyl <http://luth2.obspm.fr/~luthier/nottale/arLecce.pdf> <http://classi> liens suivants vont vous être utiles ! https://dournac.org/sciences/tensor_calculus/node29.html#SECTION00 https://dournac.org/sciences/tensor_calculus/node30.html https://dournac.org/sciences/tensor_calculus/node40.html

$$x^{\alpha i} = x^\alpha \cdot \varphi^i$$

Soit la dérivée covariante

$$\nabla_\mu = \frac{d}{dx^\mu}$$

et

$$\nabla_\nu = \frac{d}{dx^\nu}$$

Nous allons faire le calcul suivant

$$(\nabla_\mu \cdot \nabla_\nu - \nabla_\nu \cdot \nabla_\mu) \vec{X}$$

Qui est nul dans un espace euclidien sans métrique de Weyl. Commençons par

$$\nabla_\mu \vec{X} = \partial_\mu (x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha) = \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \partial_\mu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\mu h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha$$

Avec la définition des symboles de Christoffel

$$(5.1) \quad \partial_\mu \vec{e}_\alpha = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta$$

Et avec

$$(5.2) \quad \partial_\mu h_i = H_{\mu i}^j \cdot h_j$$

Puis

$$(5.3) \quad \partial_\mu \varphi^i = \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j$$

$$\nabla_\mu \vec{X} = \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta)$$

On pose

$$\gamma_\mu = \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}^\alpha$$

Or on peut invoquer les symboles de Kronecker avec :

$$\vec{e}_\beta \cdot \vec{e}^\alpha = \delta_\beta^\alpha$$

On obtient une quantité indiquant comment ce comporte la connexion dans l'espace utilisé (Riemannien et hypercomplexe) lors du parcours d'un quadri-vecteur...

$$(5.4) \quad \gamma_\mu = \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha$$

Donc

$$\nabla_\mu \vec{X} = \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha$$

Commençons le calcul $\nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X}$.

$$\nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X} = \partial_\nu (\partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X} &= \partial_\nu \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\ &\quad + \partial_\mu x^\alpha \cdot \partial_\nu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\nu h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\ &\quad + \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha + \partial_\nu x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha \\ &\quad + x^\alpha \cdot (\partial_\nu \gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha \end{aligned}$$

Nous allons former le calcul $\nabla_\mu \cdot \nabla_\nu \vec{X}$.

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \cdot \nabla_\nu \vec{X} &= \partial_\mu \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\ &\quad + \partial_\nu x^\alpha \cdot \partial_\mu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\mu h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\ &\quad + \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha + \partial_\mu x^\alpha \cdot (\gamma_\nu) \cdot \vec{e}_\alpha \\ &\quad + x^\alpha \cdot (\partial_\mu \gamma_\nu) \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\nu) \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha \end{aligned}$$

Nous devons évaluer $\partial_\nu \gamma_\mu$ et $\partial_\mu \gamma_\nu$

$$(5.5) \quad \partial_\nu \gamma_\mu = \partial_\nu (\Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha)$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu \gamma_\mu &= \partial_\nu \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \partial_\nu \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \partial_\nu \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha \\ &\quad + \Phi_{\mu j}^i \cdot \partial_\nu \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot \partial_\nu H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot \partial_\nu h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha \\ &\quad + \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot \partial_\nu h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot \partial_\nu h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha \\ &\quad + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \partial_\nu \delta_\beta^\alpha \end{aligned}$$

$$(5.6) \quad \partial_\mu \gamma_\nu = \partial_\mu (\Phi_{\nu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\nu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \gamma_\nu &= \partial_\mu \Phi_{\nu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \partial_\mu \varphi^i \cdot H_{\nu i}^j \cdot h_j + \partial_\mu \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha \\ &\quad + \Phi_{\nu j}^i \cdot \partial_\mu \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot \partial_\mu H_{\nu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot \partial_\mu h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha \\ &\quad + \Phi_{\nu j}^i \cdot \varphi^j \cdot \partial_\mu h_i + \varphi^i \cdot H_{\nu i}^j \cdot \partial_\mu h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha \\ &\quad + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \partial_\mu \delta_\beta^\alpha \end{aligned}$$

Formons la différence de transport d'un quadri-vecteur

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X} - \nabla_\mu \cdot \nabla_\nu \vec{X} &= \partial_\nu \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&+ \partial_\mu x^\alpha \cdot \partial_\nu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow + \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\nu h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&+ \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha^\rightarrow + \partial_\nu x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&+ x^\alpha \cdot (\partial_\nu \gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow + x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&- \partial_\mu \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow + \partial_\nu x^\alpha \cdot \partial_\mu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&+ \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\mu h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow + \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&+ \partial_\mu x^\alpha \cdot (\gamma_\nu) \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow + x^\alpha \cdot (\partial_\mu \gamma_\nu) \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&+ x^\alpha \cdot (\gamma_\nu) \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha^\rightarrow
\end{aligned}$$

Donc avec $\partial_\mu \vec{e}_\alpha^\rightarrow = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta^\rightarrow$ $\partial_\mu h_i = H_{\mu i}^j \cdot h_j$ $\partial_\mu \varphi^i = \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j$ $\gamma_\mu = \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha$ La différence de transport devient

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X} - \nabla_\mu \cdot \nabla_\nu \vec{X} &= \\
&\partial_\nu \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&+ \partial_\mu x^\alpha \cdot \partial_\nu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow + \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\nu h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow + \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&+ x^\alpha \cdot [\partial_\nu \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \partial_\nu \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \partial_\nu \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha + \Phi_{\mu j}^i \cdot \partial_\nu \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot \partial_\nu H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot \partial_\nu h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha \\
&\quad + \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot \partial_\nu h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot \partial_\nu h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha] \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&\quad + x^\alpha \cdot (\Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha) \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta^\rightarrow \\
&\quad - \partial_\mu \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow - \partial_\nu x^\alpha \cdot \Phi_{\mu i}^j \cdot \varphi^i \cdot h_j \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow - \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow - \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta^\rightarrow \\
&\quad - \partial_\mu x^\alpha \cdot (\Phi_{\nu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\nu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha) \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&- x^\alpha \cdot [\partial_\mu \Phi_{\nu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \partial_\mu \varphi^i \cdot H_{\nu i}^j \cdot h_j + \partial_\mu \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha + \Phi_{\nu j}^i \cdot \partial_\mu \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot \partial_\mu H_{\nu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot \partial_\mu h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha \\
&\quad + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \partial_\mu \delta_\beta^\alpha + \Phi_{\nu j}^i \cdot \varphi^j \cdot \partial_\mu h_i + \varphi^i \cdot H_{\nu i}^j \cdot \partial_\mu h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \partial_\mu \delta_\beta^\alpha] \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow \\
&\quad - x^\alpha \cdot (\Phi_{\nu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\nu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha) \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta^\rightarrow
\end{aligned}$$

$$(5.7) \quad \partial_\mu \vec{e}_\alpha^\rightarrow = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta^\rightarrow = \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha^\rightarrow$$

$$(5.8) \quad [\nabla_\nu, \nabla_\mu] \vec{X} = R_{\sigma\mu\nu}^{(\Gamma)\rho} X^\sigma \vec{e}_\rho^\rightarrow + F_{j\mu\nu}^i X^j \vec{e}_i^\rightarrow + T_{n\mu\nu}^m X^n \vec{e}_m^\rightarrow + C_{\mu\nu} X \vec{e}^\rightarrow$$

Étape 3 : Identification des Termes

5.2. Tenseur d'Einstein/Riemann Standard :

$$(5.9) \quad R_{\sigma\mu\nu}^{(\Gamma)\rho} X^\sigma \vec{e}_\rho^\rightarrow = \varphi^i h_i \left(\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \right) x^\alpha \vec{e}_\alpha^\rightarrow$$

C'est le tenseur qui mène aux équations d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, quand contracté à Ricci.

5.3. Champ Weyl/EM (F pour F) ::

$$(5.10) \quad F_{j\mu\nu}^i X^j \vec{e}_i^\rightarrow = \left(\partial_\nu \Phi_{\mu j}^i - \partial_\mu \Phi_{\nu j}^i + [\Phi_{\mu j}^i, \Phi_{\nu i}^j] \right) \varphi^j h_i x^\alpha \vec{e}_\alpha^\rightarrow$$

Le $[,]$ est le commutateur quaternionique. Ça ressemble au tenseur EM $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])$

5.4. Champ Quaternionique (T pour H) ::

$$(5.11) \quad T_{n\mu\nu}^m X^n \vec{e}_m^\rightarrow = \left(\partial_\nu H_{\mu n}^m - \partial_\mu H_{\nu n}^m + [H_{\mu n}^m, H_{\nu m}^n] \right) \varphi^n h_m x^\alpha \vec{e}_\alpha^\rightarrow$$

Ça introduit une torsion ou champ spin-like.

5.5. **Couplages Croisés (C) : Les termes mixtes (regroupés des lignes avec F G f, H G f, etc.) :**

$$(5.12) \quad C_{\mu\nu} X \vec{e} = \left(\Phi_{\mu j}^i \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \varphi^j h_i \delta_\beta^\alpha - \Phi_{\nu j}^i \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \varphi^j h_i \delta_\beta^\alpha + H_{\mu n}^m \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \varphi^n h_m \delta_\beta^\alpha - H_{\nu n}^m \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \varphi^n h_m \delta_\beta^\alpha + [\Phi, H] + \dots \right) x^\alpha \vec{e}_\alpha$$

6. LAGRANGIENS POSSIBLES POUR RGH

Pour dériver les équations de champ et les couplages de RGH, nous proposons des lagrangiens variationnels. Le lagrangien total est de la forme $L = L + L_\Phi + L_H + L + L_{mat}$, où chaque terme capture un aspect de la théorie.

6.1. **Lagrangien Gravitationnel Standard.** Le terme classique d'Einstein-Hilbert :

$$(6.1) \quad L = \frac{1}{16\pi G} R,$$

où R est le scalaire de courbure.

6.2. **Lagrangien pour le Champ Φ (Jauge Weyl).** Inspired by Weyl gravity, a kinetic term for Φ :

$$(6.2) \quad L_\Phi = -\frac{1}{4} F_{j\mu\nu}^i F_i^{j\mu\nu},$$

où $F_{j\mu\nu}^i = \partial_\nu \Phi_{\mu j}^i - \partial_\mu \Phi_{\nu j}^i + [\Phi_{\mu j}^i, \Phi_{\nu i}^j]$.

6.3. **Lagrangien pour le Champ H (Quaternionique).** Un terme similaire pour H :

$$(6.3) \quad L_H = -\frac{1}{4} T_{n\mu\nu}^m T_m^{n\mu\nu},$$

où $T_{n\mu\nu}^m = \partial_\nu H_{\mu n}^m - \partial_\mu H_{\nu n}^m + [H_{\mu n}^m, H_{\nu m}^n]$.

6.4. **Termes de Couplages.** Des termes mixtes, par ex. pour Γ - Φ :

$$(6.4) \quad L^{\Gamma\Phi} = \kappa \Phi_{\mu j}^i \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \Phi_{\beta i}^j,$$

et pour Γ - H :

$$(6.5) \quad L^{\Gamma H} = \lambda H_{\mu n}^m \Gamma_{\nu\alpha}^\beta H_{\beta m}^n,$$

où κ, λ sont des constantes de couplage.

6.5. **Lagrangien Total et Variation.** L'action totale :

$$(6.6) \quad S = \int \sqrt{-g} (L + L_\Phi + L_H + L + L_{mat}) d^4x.$$

Variation $\delta S = 0$ reproduit les équations reconstruites de (5.7), avec $\Theta_{\mu\nu}$ émergent des couplages.

7. DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DE CHAMP À PARTIR DU LAGRANGIEN

Les équations de champ sont dérivées par variation de l'action S .

8. STABILITÉ DU LAGRANGIEN ET THÉORÈME D'OSTROGRADSKY

Le théorème d'Ostrogradsky établit qu'un système dont le Lagrangien dépend de dérivées temporelles d'ordre supérieur d'une variable dynamique de manière non dégénérée conduit à un Hamiltonien non borné inférieurement, engendrant une instabilité fondamentale. Ce résultat, démontré initialement pour les systèmes à une dimension, s'étend naturellement aux théories de champs relativistes.

8.1. Rappel du cadre général. Pour un système défini par une variable généralisée $q(t)$ et un Lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q})$, la procédure canonique conduit à l'Hamiltonien suivant :

$$(8.1) \quad H = P_1 \dot{q} + P_2 \ddot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}),$$

où les moments conjugués sont

$$(8.2) \quad P_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} \right),$$

$$(8.3) \quad P_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}}.$$

Si $\mathcal{L}$ dépend non dégénérément de $\ddot{q}$ (c'est-à-dire si $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \ddot{q}^2 \neq 0$), alors H dépend linéairement de P_1 et n'est pas borné inférieurement :

$$(8.4) \quad H \rightarrow \pm\infty \quad \text{lorsque} \quad P_1 \rightarrow \pm\infty.$$

Ce comportement traduit l'*instabilité d'Ostrogradsky*, qui rend la théorie physiquement non viable (énergie non bornée, apparition de modes fantômes).

8.2. Application à la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH). Dans la formulation hypercomplexe de la métrique, notée $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + j g'_{\mu\nu}$ avec $j^2 = +1$, le Lagrangien gravitationnel généralisé s'écrit :

$$(8.5) \quad \mathcal{L}_{RGH} = \frac{1}{16\pi G} \tilde{R}(\tilde{g}_{\mu\nu}),$$

où $\tilde{R}$ désigne le scalaire de Ricci construit sur la connexion associée à $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

En développant $\tilde{R}$ selon les composantes réelles et hypercomplexes, on obtient :

$$(8.6) \quad \mathcal{L}_{RGH} = \mathcal{L}_{EH}(g_{\mu\nu}) + j \mathcal{L}'(g_{\mu\nu}, g'_{\mu\nu}, \partial g'_{\mu\nu}),$$

où $\mathcal{L}_{EH}$ est le Lagrangien d'Einstein-Hilbert usuel et $\mathcal{L}'$ ne contient que des dérivées d'ordre premier des composantes hypercomplexes.

Ainsi, la dépendance du Lagrangien complet ne dépasse pas le second ordre en dérivées de la métrique réelle $g_{\mu\nu}$, et aucune dérivée d'ordre supérieur n'apparaît dans le secteur hypercomplexe. Les variables $g'_{\mu\nu}$ jouent le rôle de champs auxiliaires dégénérés, entièrement déterminés par les équations de champ couplées :

$$(8.7) \quad \frac{\delta \mathcal{L}_{RGH}}{\delta g'_{\mu\nu}} = 0.$$

8.3. Conséquence : stabilité dynamique. La dégénérescence de la dépendance en dérivées supérieures empêche la construction d'un Hamiltonien linéairement dépendant des moments conjugués. L'énergie effective associée à la dynamique hypercomplexe reste bornée inférieurement, garantissant l'absence d'instabilité d'Ostrogradsky et la cohérence énergétique du système.

En résumé, la RGH appartient à la classe des théories de gravité modifiées *stables et sans fantômes*, préservant la borne inférieure de l'énergie et la cohérence dynamique de la métrique généralisée.

8.4. Équations pour la Gravité. Variation par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$ donne les équations d'Einstein modifiées :

$$(8.8) \quad Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu},$$

où $\Theta_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion des champs Φ , H et couplages, dérivé comme :

$$(8.9) \quad \Theta_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}(L_\Phi + L_H + L))}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Par exemple, pour L_Φ , $\Theta_{\mu\nu}^{(\Phi)} = F_{\mu\lambda} F^\lambda_\nu - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2$.

8.5. **Équations pour le Champ Φ .** Variation par rapport à $\Phi_{\mu j}^i$ donne les équations de Maxwell généralisées :

$$(8.10) \quad \nabla^\mu F_{j\mu\nu}^i = J_{j\nu}^i + \kappa \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \Phi_{\beta i}^j,$$

où $J_{j\nu}^i = \frac{\delta L_{mat}}{\delta \Phi_{\nu j}^i}$ est le courant associé, et le terme κ représente le couplage à la gravité.

8.6. **Équations pour le Champ H .** Variation par rapport à $H_{\mu n}^m$ donne :

$$(8.11) \quad \nabla^\mu T_{n\mu\nu}^m = K_{n\nu}^m + \lambda \Gamma_{\nu\alpha}^\beta H_{\beta m}^n,$$

où $K_{n\nu}^m = \frac{\delta L_{mat}}{\delta H_{\nu n}^m}$ est le courant associé, et le terme λ capture le couplage gravitationnel. Ces équations montrent comment les couplages modifient les dynamiques des champs, menant à des effets émergents comme la matière noire.