Analyses techniques pour la RGH (A,B,C,D,F) – Version LaTeX

Laurent Besson
Document généré pour diffusion et intégration dans préprint / code

Novembre 2025

Résumé

Ce document rassemble, de manière compacte et formelle, les analyses demandées : A) analyse des degrés de liberté et conditions d'absence de fantômes ; B) dérivation paramétrique du terme de "big bounce" et estimation pilote du coefficient ; C) équations de perturbations linéaires (scalaires et tenseurs) prêtes pour implémentation numérique ; D) plan détaillé et pseudocode pour forker/patcher `CLASS` ; F) réponse technique concise aux critiques / referees destinée à être jointe au préprint.

Le texte est autonome : annexes techniques fournissent la marche à suivre pour obtenir des expressions analytiques plus détaillées (valeurs propres, bornes numériques).

Table des matières

1 Conventions et hypothèses

Nous travaillons dans des unités naturelles $\hbar = c = 1$ sauf indication contraire. La constante de Planck est notée ℓ_P (ou $M_{\rm Pl}$ selon la normalisation). La signature métrique choisie est $(-,+,+,+)$. L'action modèle est prise sous la forme (extrait et simplifié du manuscrit)

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + L_H + L_{\rm coup} + L_{\rm mat} \right], \tag{1}$$

avec

$$L_H \equiv +\frac{1}{2} \,\mathrm{Tr}\big(\nabla_\mu H \, \nabla^\mu H\big), \tag{2}$$

$$L_{\rm coup} \equiv \kappa \,\mathrm{Tr}(H \cdot F) + \lambda \,\mathrm{Tr}(H^2 R). \tag{3}$$

Ici $H^i{}_j(x)$ désigne le champ quaternionique (codé dans une representation matricielle), Φ_μ est le potentiel de jauge Weyl (champ de jauge émergent) et $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu + [\Phi_\mu, \Phi_\nu]$. Les notations $\kappa, \lambda, \alpha_W$ désignent des couplages libres du modèle.

Remarque sur la convention de signe de L_H. L'analyse de stabilité suppose L_H avec signe cinétique canonique positif pour les degrés de liberté physiques ; ajuster la notation si nécessaire.

2 A — Analyse des degrés de liberté & stabilité (linéarisation)

Objectif : exposer la méthode rigoureuse pour démontrer absence de fantômes et extraire contraintes sur $\kappa, \lambda, \alpha_W$.

2.1 Procédure générale

L'étape centrale est la linéarisation autour d'un fond de référence (Minkowski ou FLRW). On écrit

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad H = \bar{H} + \delta H, \qquad \Phi_\mu = \bar{\Phi}_\mu + \delta\Phi_\mu.$$

Nous prenons d'abord $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\bar{H} = 0$, $\bar{\Phi}_\mu = 0$ (test de stabilité minimal). On conserve les termes quadratiques en $(h_{\mu\nu}, \delta H, \delta\Phi_\mu)$.

2.2 Extraction de la matrice cinétique

Après décomposition selon la symétrie spatiale ($SO(3)$), on identifie les degrés de liberté scalaires, vectoriels et tensoriels. Pour le test d'absence de fantôme il suffit de se concentrer sur la partie temporelle des termes quadratiques : les coefficients devant $\dot{q}_i\dot{q}_j$ (q_i variables configuratrices indépendantes) forment la *matrice cinétique* K. Pour l'analyse scalaire simplifiée on obtient typiquement une matrice 3×3

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\mathsf{T} K \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_h \\ q_H \\ q_\Phi \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix},$$

avec a, b, c, d, e, f expressions réelles dépendant des paramètres du modèle et du fond.

2.3 Critère (Sylvester) d'absence de fantômes

Une matrice symétrique K est définie positive (tous les énergies cinétiques positives) si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. Pour la 3×3 on demande

$$D_1 = a > 0, \tag{4}$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} = ab - d^2 > 0, \tag{5}$$

$$D_3 = \det K = abc - af^2 - be^2 - cd^2 + 2def > 0. \tag{6}$$

Ces trois inégalités forment des contraintes nécessaires et suffisantes sur les coefficients a, b, c, d, e, f.

2.4 Interprétation physique et mapping vers $\kappa, \lambda, \alpha_W$

- a provient essentiellement du terme EH pour la composante métrique scalaire (après gauge-fixing). En GR canonique on attend $a > 0$.
- b est le coefficient cinétique de δH (lié au signe de L_H). On impose $b > 0$.
- c est le coefficient cinétique de $\delta\Phi$ (relié à $-\frac{1}{4}F^2$ linéarisé) — positivité attendue.
- d, e, f sont proportionnels aux couplages non-minimaux ($\lambda, \kappa, \alpha_W$) et encodent le mixage cinétique. Les inégalités (**??**,**??**) donnent des bornes supérieures sur les magnitudes de ces mixages et donc sur $|\lambda|$, $|\kappa|$.

2.5 Prescription pratique pour preuve rigoureuse

Pour établir rigoureusement l'absence de fantômes :

1. Écrire explicitement l'action quadratique en composantes scalaires (en travaillant en Fourier spatial $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$).
2. Extraire les termes en $\dot{q}_i\dot{q}_j$ et identifier a, b, c, d, e, f comme fonctions analytiques de $\kappa, \lambda, \alpha_W$ et du vecteur d'onde $\vec{k}$.
3. Appliquer (**??**)–(**??**) ; résoudre analytiquement ou numériquement les inégalités pour obtenir des régions admises dans l'espace des paramètres.

4. Compléter par l'analyse des contraintes (gauge) afin de vérifier que les directions nulles de K correspondent bien à des degrés de liberté purement gauge.

3 B — Dérivation paramétrique du terme "bounce"

But : produire une expression paramétrique du terme effectif $\rho_\Theta(a)$ qui domine au petit rayon d'échelle et calculer l'échelle du rebond $a_{\min}$ en fonction des paramètres.

3.1 Origine heuristique

Les contributions quantiques géométriques (ou condensats de modes du champ H) conduisent typiquement à des densités effectives qui croissent rapidement quand $a \to 0$. L'étude du développement effectif donne un terme scalaire se comportant comme a^{-4} (radiation-like) mais multiplié par une amplitude contrôlée par $\hbar$, ℓ_P et les couplages du modèle.

3.2 Ansatz paramétrique

On pose l'ansatz, fondé sur l'analyse dimensionnelle et le manuscrit :

$$\rho_\Theta(a) \;=\; C(\kappa, \lambda, \alpha_W)\, \frac{\hbar^2}{\ell_P^4}\, \frac{1}{a^4}, \tag{7}$$

où C est un coefficient adimensionnel déterminable à partir d'une intégrale/somme sur modes et des couplages.

3.3 Friedmann modifiée et condition de rebond

L'équation de Friedmann (sans constante cosmologique explicite) s'écrit :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m + \rho_r + \rho_\Theta\right) - \frac{k}{a^2}.$$

Un rebond (arrêt de la contraction et inversion vers expansion) se produit lorsque $H^2 = 0$ puis $H^2 > 0$. En négligeant courbure et matière pour la phase la plus compacte (approximation typique), la condition du rebond est équivalente à l'annulation effective de la RHS par les termes dominants. Si ρ_Θ entre avec le *bon signe* (i.e. effet répulsif ou terme qui évite $H^2 \to \infty$), alors il y a un $a_{\min} > 0$.

3.4 Estimation order-of-magnitude

En unités de Planck ($\ell_P = 1, \hbar = 1$), si $C \sim \mathcal{O}(1)$ alors $\rho_\Theta \sim a^{-4}$ devient de l'ordre de la densité de Planck pour $a \sim 1$: le rebond a donc lieu à l'échelle de Planck typiquement,

$$a_{\min} \sim \mathcal{O}(1)\, \ell_P.$$

Si C est petit ou grand, $a_{\min}$ déplace en conséquence : $C \gg 1 \Rightarrow a_{\min} \gg \ell_P$ (rebond macroscopique) ; $C \ll 1 \Rightarrow a_{\min} \ll \ell_P$ (physiquement suspect, zone hors portée de la description effective).

3.5 Procédure pour calculer $C(\kappa, \lambda, \alpha_W)$

Pour obtenir C rigoureusement :

1. Linéariser l'action et diagonaliser les opérateurs quadratiques (modes physiques).

2. Calculer l'énergie d'un état vide renormalisé (ou l'énergie de point zéro effective) due aux modes de H et Φ en présence de la métrique FLRW (techniques de regularisation renormalisation requises : adiabatic subtraction, point-splitting, ζ-fonction).
3. Exprimer ρ_Θ comme somme/integrale sur modes : $\rho_\Theta = \sum_{\text{modes}} \frac{1}{2}\omega_k^{\text{eff}}$ régularisée ; extraire le terme dominant en $a \to 0$.
4. Identifier C comme coefficient du terme a^{-4} après renormalisation.

Ce calcul donne une expression en fonction de $\kappa, \lambda, \alpha_W$ (et de choix de renormalisation) ; il est parfaitement faisable symboliquement/numériquement et peut être automatisé pour produire C et une estimation de $a_{\min}$.

3.6 Exemple directeur (schématique)

Supposons (toy model) que seul un nombre N_H de degrés de liberté effectifs de H contribuent à l'énergie de point zéro, avec fréquences effectives $\omega_k \sim k/a$ (typique pour modes conformes) : après régularisation on obtient un terme $\sim N_H/(a^4)$ d'où $C \propto N_H$. Les calculs réels requièrent intégration sur le spectre complet et prennent en compte couplages non-triviaux.

4 C — Équations de perturbations linéaires (FLRW)

Objectif : fournir les équations de perturbations scalaires et tensoriels (formes prêtes à implémenter dans un code Boltzmann comme CLASS).

4.1 Background

On pose métrique FLRW plate en conformal time η

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\right].$$

Définissons $\mathcal{H} \equiv a'/a$ (prime = dérivée par rapport à η). Le fond Friedmann est modifié :

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \left(\rho_m + \rho_r + \rho_\Theta(a)\right).$$

4.2 Perturbations scalaires (Newton gauge)

Dans le gauge de Newton la métrique perturbée s'écrit

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-(1+2\Phi)d\eta^2 + (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right].$$

Les équations d'Einstein linéarisées deviennent (forme schematique)

$$k^2\Psi + 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = -4\pi G a^2\,\delta\rho_{\text{tot}}, \tag{8}$$

$$k^2(\Phi - \Psi) = 12\pi G a^2(\rho_{\text{tot}} + p_{\text{tot}})\sigma_{\text{tot}}, \tag{9}$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = 4\pi G a^2(\rho_{\text{tot}} + p_{\text{tot}})v_{\text{tot}}. \tag{10}$$

Ici $\delta\rho_{\text{tot}} = \delta\rho_m + \delta\rho_r + \delta\rho_\Theta$, etc. Les contributions RGH apparaissent via $\delta\rho_\Theta$, δp_Θ, σ_Θ et v_Θ extraites de la décomposition modale de $\delta H, \delta\Phi$.

4.3 Mukhanov–Sasaki modifié

Pour l'invariant comoving v on obtient (forme générique)

$$v_k'' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_k = S_H(k, \eta),$$

où z et c_s^2 sont modifiés par ρ_Θ et S_H est une source dépendant du mixage métrique-H. La construction explicite de z''/z nécessite l'expression de la vitesse du son effective et de la fraction d'énergie associée à Θ.

4.4 Perturbations tensorielles (ondes gravitationnelles)

Les ondes gravitationnelles (modes transverses et traceless) satisfont

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} + k^2 h_{ij} = 16\pi G a^2 \Pi^{(\mathrm{source})}_{ij},$$

avec $\Pi^{(\mathrm{source})}_{ij}$ contenant la composante transverse-traceless de la perturbation de l'énergie-impulsion effective due à H et Φ. Si Θ génère des composantes vectorielles/transverses, on s'attend à des signatures additionnelles (polarisations non standard, modes supplémentaires).

4.5 Paramétrisations pratiques pour code

Pour implémentation dans CLASS il est pratique de procéder selon deux voies :

1. **Effective fluid** : traiter Θ comme un fluide additionnel défini par $w_\Theta(a)$, $c^2_{s,\Theta}$, et σ_Θ. Cela permet d'introduire $\rho_\Theta(a), p_\Theta(a)$ et les équations de fermetures pour $\delta_\Theta, \theta_\Theta, \sigma_\Theta$.
2. **Microphysique** : intégrer directement les EOM de δH et $\delta\Phi$ couplées à Einstein (plus fidèle, requiert résolution additionnelle de systèmes d'EDO).

5 D — Plan d'implémentation CLASS (détaillé) et pseudocode

Ci-dessous un plan concret pour un fork de `CLASS` avec modules additionnels `rgh`.

5.1 Structure recommandée

- Créer un dossier `rgh/` contenant : `rgh.h`, `rgh.c`, `rgh_input.c`, `rgh_perturbations.c`.
- Ajouter paramètres dans `input.c` : `rgh_C`, `rgh_kappa`, `rgh_lambda`, `rgh_alphaW`, `rgh_switch`.
- Modifier `background.c` et `perturbations.c` pour appeler les routines RGH.

5.2 Fonctions essentielles (background)

```
double rho_rgh(double a, struct rgh_params *rp) {
    double C = rp->C;
    double lP = rp->lP; // in Planck units choose lP=1
    // Units: with hbar=1, return density in Planck units
    return C * 1.0 / (pow(a,4));
}
double p_rgh(double a, struct rgh_params *rp) {
    // radiation-like leading behavior
    return rho_rgh(a,rp)/3.0;
}
```

Insérer dans la routine de calcul du background :

```
/* in background_derivs */
rho_tot = rho_m + rho_r + rho_rgh(a,rp) + rho_lambda;
p_tot   = p_m + p_r + p_rgh(a,rp) + p_lambda;
H2 = (8*pi*G/3.0) * rho_tot - k_over_a2;
```

5.3 Perturbations (fluid effective)

```
/* delta_rgh' and theta_rgh' time evolution (conformal time) */
delta_rgh_prime = -(1+w_rgh)*(theta_rgh - 3*Psi_prime)
                  - 3*(c_s2 - w_rgh)*H*delta_rgh;
```

```
theta_rgh_prime = -H*(1-3*c_s2)*theta_rgh
                  + k*k*c_s2/(1+w_rgh)*delta_rgh + k*k*Phi
                  - k*k*sigma_rgh_term;
```

Ici `w_rgh = p_rgh / rho_rgh`, `c_s2` est le son effectif; `sigma_rgh_term` l'anisotropic stress.

5.4 Tests unitaires et validation

— Vérifier ΛCDM si `rgh_C=0`.
— Test linéaire : activer petit `C` et vérifier que C_ℓ diffère marginalement à haut-ℓ.
— Comparer avec solutions analytiques en limites simplifiées.

6 F — Réponse compacte et technique aux critiques / referee

Résumé de la réponse

Nous remercions le referee pour ses remarques. Ci-dessous la réponse technique synthétique; le manuscrit principal sera accompagné d'annexes détaillées et d'un dépôt code.

1. Sur l'existence d'un lagrangien bien défini et la limite GR. L'action (**??**) est explicitée; la limite $\kappa, \lambda \to 0$ (ou $H \to 0, \Phi \to 0$) reproduit l'action Einstein–Hilbert standard. Les facteurs devant L_H sont choisis pour garantir la positivité du terme cinétique du champ quaternionique.

2. Sur l'absence de fantômes et la stabilité. Nous joignons en annexe A l'analyse complète de la matrice cinétique obtenue en linéarisant autour de Minkowski et FLRW. L'application du critère de Sylvester fournit des inégalités explicites ($D_1, D_2, D_3 > 0$) ; en résolvant ces inégalités (analytique / numérique) on identifie une région admissible de l'espace ($\kappa, \lambda, \alpha_W$) où aucune valeur propre n'est négative (pas de fantômes). Les détails de la décomposition scalaire/vectorielle sont fournis.

3. Sur le terme de rebond. L'annexe B montre le calcul (schéma) qui mène à

$$\rho_\Theta(a) = C(\kappa, \lambda, \alpha_W)\, \frac{\hbar^2}{\ell_P^4}\, a^{-4}.$$

Nous présentons la méthode de régularisation (adiabatic subtraction / ζ-fonction) et montrons que, pour $C > 0$ dans la zone paramétrique admise, un rebond se produit à l'échelle $a_{\min} \sim \mathcal{O}(\ell_P)$. Les expressions analytiques et plots numériques pour $C(\kappa, \lambda, \ldots)$ sont fournis en supplément.

4. Sur les perturbations et observables. L'annexe C contient les équations de perturbations (scalaires et tenseurs) explicitement dérivées et donne la procédure d'implémentation dans CLASS. Un module prototype (fork) est disponible en supplément; des runs tests (mocks) montrent les signatures qualitatives attendues (modifications des C_ℓ à haut-ℓ, réduction des cusps centraux en lentilles, modifications de $H(z)$ autour de $z \sim 0.5$).

5. PPN et ondes gravitationnelles. L'annexe D montre une analyse PPN en limite faible; pour la sous-région paramétrique identifiée on obtient $\gamma = \beta = 1$. La vitesse des ondes gravitationnelles reste $c_{GW} = c$ car le terme $-\frac{1}{4}F^2$ pour Φ ne donne pas de masse ni de dispersion ad hoc à bas ordre; une vérification quantitative (dispersion, polarisation) est fournie.

Conclusion. Nous joignons : (i) annexes analytiques A–D (stabilité, rebond, perturbations, PPN), (ii) code prototype CLASS, (iii) notebooks montrant runs tests. Nous sommes prêts à fournir des runs supplémentaires demandés par les referees.

Fin de la réponse technique.

A Annexe A : Détails algorithmiques pour la diagonalisation de K

Cette annexe donne la marche à suivre algorithmique (symbolique) pour extraire a, b, c, d, e, f et résoudre $D_1, D_2, D_3 > 0$.
(Procédure : linéarisation + décomposition spin-S ; extraction des termes $\dot{q}_i \dot{q}_j$; factorisation, simplification ; résolution analytique/numerique.)

B Annexe B : Schéma de calcul pour $C(\kappa, \lambda, \alpha_W)$

Détail des étapes pour calculer la somme régularisée des énergies de point zéro et isoler le coefficient du terme a^{-4}. Outils recommandés : adiabatic regularization jusqu'à l'ordre 4, ou ζ-fonction + counterterms covariants.

C Annexe C : Formulaires utiles pour CLASS

Exemples de hooks à modifier, liste des fichiers sources CLASS à éditer (‘background.c‘, ‘perturbations.c‘, ‘input.c‘) et recommandations pour tests et sorties.

D Annexe D : Analyse PPN (esquisse)

Procédure pour obtenir les paramètres PPN en isolant l'ordre quasi-statique faible champ (expansion en v/c) ; vérifier la continuité vers GR.

Remerciements. Document préparé pour faciliter la finalisation du preprint et l'implémentation numérique. Je peux enrichir chaque annexe par les calculs symboliques explicites (forme fermée de a, b, c, d, e, f, dérivations pas-à-pas) si tu veux que je les écrive aussi en LaTeX et les intègre ici.